# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ПРЕПЯТСТВИЯ ПОТОКОМ ЗАВИХРЕННОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

**Г.Г.Коротков**

*Кемеровский государственный университет*
*г. Кемерово, ул. Красная, 6*
*gena@kemsu.ru*

Рассматривается стационарная задача об обтекании препятствия, расположенного на дне, вихревым плоскопараллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины со свободной поверхностью. Данная задача является развитием работы [1], в которой рассматривается обтекание препятствия в отсутствии завихренности. Завихренность вносит существенный вклад в результаты расчетов и характеристики потока становятся более приближенными к реальным.

**Постановка задачи.** Область течения D (рис.1) ограничена свободной поверхностью $\Gamma_1$, участками втекания $\Gamma_2$ и вытекания $\Gamma_3$, а также твердым дном $\Gamma_4$, состоящим из прямолинейных участков и полукругового цилиндрического выступа радиуса R. Глубина жидкости на бесконечности принимается равной H, скорость течения $V_\infty$. Границы $\Gamma_2$ и $\Gamma_3$ должны быть выбраны на достаточно большом удалении от выступа с тем, чтобы поток через эти границы был близок к параллельному.

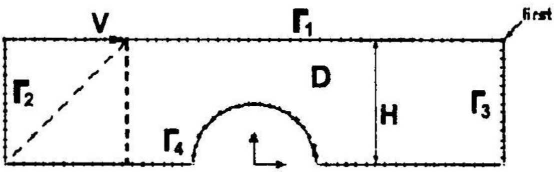


Рис. 1

Данная задача описывается уравнением Пуассона

$$\Delta\psi = \omega,$$

где $\psi$ – функция тока, $\omega$ – завихренность потока,

$$\omega = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}; \qquad V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

На $\Gamma_4$ выполняется условие непротекания. Распределение скорости на участках втекания и вытекания задается законом: $V(y) = 1 + \omega(1 - y)$, тогда

$$\psi(y) = \int_0^y V(y)dy = \frac{1}{2}\omega y^2 + (1-\omega)y.$$

Завихренность на всей области течения принимается равной константе $\omega \in [0,1]$. Свободная граница является линией тока $\psi(x,y) = 1 - \omega/2$, для которой справедливо уравнение Бернулли:

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|^2 + gy = \frac{1}{2}V_\infty^2 + gH. \quad (1)$$

Задача является нелинейной в силу нелинейности условия (1) и в силу того, что свободная граница заранее неизвестна и ее положение должно быть определено численно в ходе решения задачи.

Для численного решения задача приводится к безразмерному виду. В качестве характерных размерных величин выбираются глубина $H$ и скорость потока $V_\infty$ на бесконечности. Условие (4) преобразуется к виду

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|^2 = 1 + 2\frac{1-y}{Fr^2}, \quad (2)$$

где $Fr = V_\infty / \sqrt{gH}$ – число Фруда. Приведенная к безразмерному виду краевая задача зависит от трех параметров: радиуса обтекаемого цилиндра $R$, завихренности $\omega$, и числа Фруда $Fr$. В работе [2] доказано, что для различных значений числа Фруда задача имеет, по крайней мере, два решения. Поэтому целесообразным является в качестве параметра, определяющего течение, вместо числа Фруда задавать безразмерный параметр $V = V_0 / V_\infty$, где $V_0$ – скорость в вершине волны, $V_\infty$ – скорость набегающего потока на бесконечности. При этом $Fr=Fr(V)$.

Поскольку уравнение (1) справедливо для любой точки на свободной поверхности, то

$$\frac{V_0^2}{2} + gy_0 = \frac{V_\infty^2}{2} + gH.$$

Поделив данное равенство на $V_\infty^2$ и воспользовавшись выражением для числа Фруда, получим $Fr^2 = 2(y_0 - 1)/(1 - V^2)$. После этого (2) перепишется следующим образом:

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2 = 1 - \left(1 - V^2\right)\frac{y-1}{y_0 - 1}.$$

Параметр $V$ изменяется в пределах $[0,1)$: 1 – соответствует бесконечному числу Фруда, 0 – числу Фруда, близкому к единице.

**Метод граничных элементов.** Для решения задачи используется метод граничных элементов [3] на основе третьей формулы Грина, связывающей искомую функцию тока $\psi$ и ее нормальную производную $\partial\psi/\partial n$.

Граничные задачи для уравнения Пуассона можно свести к аналогичным задачам для уравнения Лапласа, если из общего решения вычесть частное, не зависящее от граничных условий. В общем же случае, когда отыскать частное решение не представляется возможным, интегральное уравнение запишется в виде:

$$c(\xi)\psi(\xi) + \int_\Gamma \psi(x)q^*(\xi,x)d\Gamma(x) + \int_\Omega \omega(x)\psi^*(\xi,x)d\Omega(x) = \int_\Gamma q(x)\psi^*(\xi,x)d\Gamma(x)$$

$$\psi^* = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{r};\quad q^* = \frac{\partial\psi^*}{\partial n};\quad q = \frac{\partial\psi}{\partial n}.$$

Здесь $\psi^*$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Для вычисления интеграла по области можно воспользоваться численным интегрированием по ячейкам:

$$B_i = \int_\Omega \omega\psi^* d\Omega = \sum_{N_e}\left(\sum_{k=1}^{K} w_k(\omega\psi^*)\right)A_k,$$

где $w_k$ – веса; функцию $\omega\psi^*$ следует задавать в $K$ точках интегрирования; $N_e$ – число ячеек, на которое была разбита область $\Omega$, $A_k$ площадь каждой ячейки; значение $B_i$ определено для каждого фундаментального решения, заданного в $i$-м узле.

Полную систему уравнений для $N$ узлов можно представить в матричной форме $B + HU = GQ$, причем на границе известно $N_1$ значений $\psi$ и $N_2$

значений $q$. Перенеся все неизвестные величины в левую часть, получим систему $N \times N$ линейных алгебраических уравнений $AY = F$.

**Алгоритм построения свободной поверхности.** В основу метода построения свободной поверхности положено условие того, что свободная граница является линией тока, на которой выполняется соотношение $\psi(x,y) = 1 - \omega/2$. Для любой точки $(x,y) \in \Gamma_1$ очевидно выполняется условие

$$\psi(x,y) \le y,$$

или $\psi(x,y) = K(x,y) \cdot y$, где $K(x,y) \le 1 \quad \forall (x,y) \in \Gamma_1$

Если ввести следующие обозначения: $y_i^m$ – точное значение в узлах границы; $y_i^k$ – численное решение на $k$-ом шаге; $\psi_i^m = 1 - \omega/2$ – точное значение функции тока в узлах границы; $\psi_i^k$ – численное значение функции тока на $k$-ом шаге, то из (7) получим $\psi_i^m - \psi_i^k \le y_i^m - y_i^k$.

Алгоритм нахождения свободной границы состоит в следующем:

1. на $k$-й итерации известно некоторое положение свободной границы $\Gamma_1^k$;
2. по формуле (6) определяем значения $(\partial\psi/\partial n)_i$ в узлах на $\Gamma_1^k$;
3. решаем краевую задачу с заданным распределением нормальной производной функции тока на свободной границе $\Gamma_1^k$;
4. новое положение свободной границы находим из соотношения

$$y_i^{k+1} = y_i^k + \Delta y_i^k, \quad \text{где} \quad \Delta y_i^k = 1 - \frac{1}{2}\omega - \psi_i^k.$$

Критерием останова итерационного процесса в данном алгоритме является условие: $\max\limits_i \left| y_i^{k+1} - \psi_i^k \right| < \varepsilon$ или $\max\limits_i \left| \psi_i^m - \psi_i^k \right| < \varepsilon$.

**Результаты расчетов.** Варьируемыми параметрами задачи являются завихренность $\omega$, безразмерный параметр $V$ и радиус цилиндра R. На рис. 2 представлены результаты расчета задачи по нахождению свободной границы при отсутствии препятствия на дне для различных значений завихренности. Значение параметра $V$=0, что соответствует волне максимальной амплитуды.

На рис. 3 и 4 приведены зависимости амплитуды получаемой уединенной волны от числа Фруда для различных значений завихренности. Рис. 3 соответствует радиусу R=0 (отсутствию препятствия на дне) и описывает уединенную волну. Рис. 4 соответствует R=0.5. Линия, соединяющая вершины кривых, является графиком зависимости амплитуды $A$ от числа Фруда $Fr$: $A = Fr^2/2$. Эта зависимость характеризует волну максимальной амплитуды, у которой в вершине $V_0 = 0$.

Как и в случае безвихревого течения расчеты показали наличие чисел Фруда, для которых задача имеет два (рис. 3) или три (рис. 4) решения. При отсутствии завихренности ($\omega = 0$) результаты расчетов полностью совпадают с результатами, полученными в работе [1].

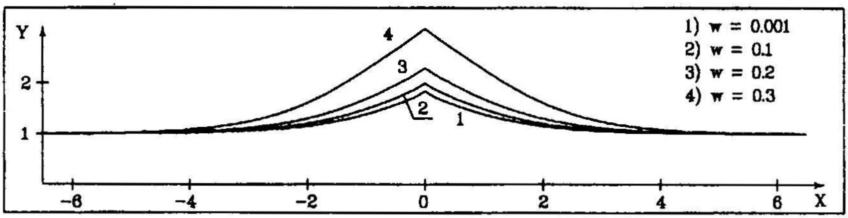


Рис. 2

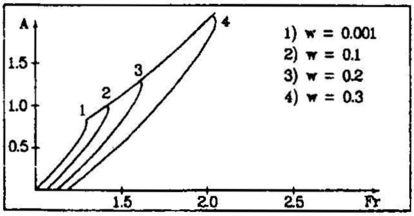


Рис. 3

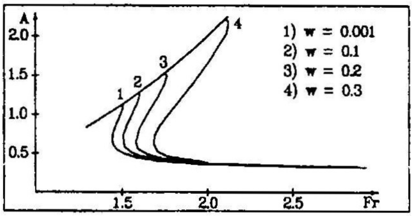


Рис. 4

## ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. *О наличии трех решений при обтекании препятствия потоком сверхкритической тяжелой жидкости* //Журн. прикл. мех. и техн. физика. – 1999. – Т. 40. – № 1. – С. 27–35.

2. Плотников П.И. *Неединственность решения задачи об уединенных волнах и бифуркации критических точек гладких функционалов* //Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1991. – Т. 55. – № 2. – С. 339–366.

3. Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л. *Методы граничных элементов*. – М.: Мир, 1987.